

Leçon 191: Exemples d'utilisation de techniques d'algèbre en géométrie

I / Espaces euclidiens

Ici, le corps de base sur lequel sont définis les espaces vectoriels et affines est $\mathbb{R}$ et ces espaces sont de dimension finie.

1) le groupe des isométries

Définition 1: • Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace vectoriel euclidien.
• Un espace affine euclidien est un espace affine dirigé par un espace vectoriel euclidien.

• On définit la distance de 2 points A et B par $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$ que l'on note AB .

Définition 2: • Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme, c'est-à-dire une application linéaire $f: E \rightarrow F$ (E et F sont des espaces vectoriels euclidiens) telle que $\|f(u)\| = \|u\|$.

• Une application affine $\varphi: E \rightarrow F$ (E et F sont des espaces affines euclidiens) est une isométrie affine si $d(\varphi(A), \varphi(B)) = d(A, B) = AB$
 $\forall A, B \in E$, c'est-à-dire que l'application linéaire associée est une isométrie vectorielle.

Remarque 3: Une isométrie conservant la norme, elle conserve aussi le produit scalaire et l'orthogonalité.



On considère E un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien associé à E .

On note $O(E)$ l'ensemble des isomorphismes de E , $Is(E)$ l'ensemble des isométries de E .

Théorème 4: $(O(E), \circ)$ et $(Is(E), \circ)$ sont des groupes

Exemples 5: - les translations sont des isométries FIGURE 1
- les symétries orthogonales sont des isométries

Proposition 6: Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel euclidien stable par $f \in O(E)$. Alors, $F^\perp$ stable par f .

Théorème 7: Si $\dim(E) = m$, toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour $p \in [0; m]$.

Corollaire 8: Si $\dim(E) = m$, toute isométrie de E peut s'écrire comme composée de p réflexions pour $p \in [0; m+1]$.

Définition 9: On dit qu'une isométrie (affine) est un déplacement si son déterminant (celui de l'application linéaire associée) est positif. Une isométrie qui n'est pas un déplacement est un anti-déplacement.

Remarque 10: - les isométries sont des bijections et ont donc un déterminant non nul.

- L'ensemble $SO(E)$ ($Is^+(E)$) est un sous-groupe de $O(E)$ ($Is(E)$) des déplacements.

Proposition 11: Pour que le nombre de réflexions qui intervient dans la décomposition d'une isométrie soit pair, il faut et il suffit que celle-ci soit un déplacement.

Proposition 12: Le déterminant d'une isométrie est ± 1 . En particulier, $SO(E) \trianglelefteq O(E)$ et $IS^+(E) \trianglelefteq IS(E)$.

2) Application au cas du cube

Théorème 13: Soit E un espace affine de dimension 3 et C un cube de côté $c > 0$ vu comme l'ensemble de ses sommets. Alors, $IS^+(C) \simeq S_4$ et $IS(C) \simeq S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

DEV 1 FIGURE 2

Dictionnaire du cube: Isomorphisme entre $IS^+(C)$ et S_4 .

$IS^+(C)$	S_4	Nombre
Id	Id	1
rotation d'axe sommets - sommets opposés d'angle $\pm \frac{2\pi}{3}$	3-cycles	$2 \times \frac{8}{2} = 8$
rotation d'angle π passant par le centre de 2 faces opposées	produit de 2 transposi- tions à supports disjoints	$\frac{6}{2} = 3$
rotation d'angle π passant par le centre de 2 arêtes opposées	transpositions	$\frac{12}{2} = 6$
rotation d'angle $\pm \frac{\pi}{2}$ passant par le centre de 2 faces opposées	4-cycles	$2 \times \frac{6}{2} = 6$

II / Racines de l'unité et géométrie

1) Lien avec les isométries et les angles

Définition 14: $O(E)$ est appelé groupe orthogonal de E . Une base orthonormée de E étant choisie, on identifie $O(E)$ à $O(\mathbb{R}^n)$, noté $O(n)$, que l'on peut aussi considérer comme un ensemble de matrices.



MADE WITH
Scanner
App



Proposition 15: $A \in O(m) \Leftrightarrow {}^tAA = Id$.

On note $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1

Proposition 16: $SO(2) \simeq U$

Corollaire 17: $SO(2)$ est commutatif

Définition 18: Grâce à l'exponentielle complexe, on définit une application :

$$\mathbb{R} \longrightarrow U \longrightarrow SO(2)$$

$$\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

qui est surjective et 2π -périodique et définit un isomorphisme de groupe $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow SO(2)$.

L'image du réel θ s'appelle notation d'angle θ .

Proposition 18: Soit $A \in O(2)$. Alors, A est de la

forme $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\varepsilon \sin \theta \\ \sin \theta & \varepsilon \cos \theta \end{pmatrix}$ avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$

2) Une autre application remarquable

Théorème 19: (Déterminant circulant) Soient $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{C}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{m}\right)$. Alors

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{m-1} \\ a_{m-1} & a_0 & \dots & a_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & \dots & a_{m-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1} a_k \omega^{jk}$$

FIGURE 6

Théorème 20: (Suite de polygones) Soit P un polygone du plan complexe dont les sommets sont $\{z_1, \dots, z_m\}$. On définit par récurrence $(P_k)_{k \geq 0}$ une suite de polygones avec $P_0 = P$ et où les sommets de P_{k+1} sont les milieux des arêtes de P_k . Alors $(P_k)_{k \geq 0}$ converge vers l'isobarycentre de P .

III / Théorie des nombres constructibles à la règle et au compas

Définition 20: Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ et soit $\pi \in \mathbb{R}^2$. On dit que π est constructible, en un pas, à partir de A s'il existe 2 éléments distincts, droites ou cercles, dont π soit un point d'intersection.

• Un nombre $x \in \mathbb{R}$ est dit constructible si, et seulement si, $(x, 0)$ l'est.

Définition / Théorème 21: L'ensemble C des nombres constructibles est un sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée. FIGURE 3

Exemple 22: Pour $a, b > 0$, $a, b \in \mathbb{Q}$, on définit les suites récurrentes $x_{m+1} = \frac{x_m + y_m}{2}$, $x_0 = a$, $y_0 = b$, $y_{m+1} = \sqrt{x_m y_m}$. Alors (x_m, y_m) est constructible $\forall m \in \mathbb{N}$. FIGURE 4

Remarque 23: Comme C est un sous-corps de $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset C$. FIGURE 5

Théorème 24: (Wantzel) Soit $t \in \mathbb{R}$.

t est constructible $\Leftrightarrow \exists$ une tour de sous-corps de $\mathbb{R}$ $L_1, \dots, L_m$ telle que: • $L_1 = \mathbb{Q}$, DEV 2
• $\forall j \in [1; m-1]$, $[L_{j+1} : L_j] = 2$, • $t \in L_m$.

Théorème 25: Soit $H \subset K \subset L$ des corps. Alors,

$$[L : H] = [L : K][K : H]$$

Corollaire 26: (de Wantzel). Soit $t \in C$. Alors $\exists m \in \mathbb{N}$ tel que $[Q(t) : Q] = 2^m$.

Appli

- $\exists$ de

- Imm

Théor

4×3

Propos

$\Rightarrow A$

Théor

les pol

dont

avec

p : so



MADE WITH
Scanner
App



Application 27: - le 7-gone n' est pas constructible

- $\nexists$ de carré de même aire qu'un cercle
- Impossibilité de la duplication du cube

Théorème 28: L'angle θ est trissectable $\Leftrightarrow$
 $4x^3 - 3x - \cos \theta$ est réductible dans $\mathbb{Q}(\cos(\theta))[X]$

Proposition 29: Soient $m, n \in \mathbb{N}^+$. $m \wedge n = 1$.

$\Rightarrow$ Alors $\frac{2\pi}{mn}$ constructible $\Leftrightarrow \frac{2\pi}{m}$ et $\frac{2\pi}{n}$ constructibles.

Théorème 30: (Gauss-Wantzel) [Admis en partie]
Les polygones réguliers constructibles sont ceux
dont le nombre de côtés n est de la forme 2^α
avec $\alpha \geq 2$ ou $2^\alpha p_1 \dots p_r$ avec $\alpha \in \mathbb{N}$ et où les
 p_i sont des nombres premiers de Fermat.



FIGURE 1: la Réflexion d'hyperplan dans $\mathbb{R}^3$

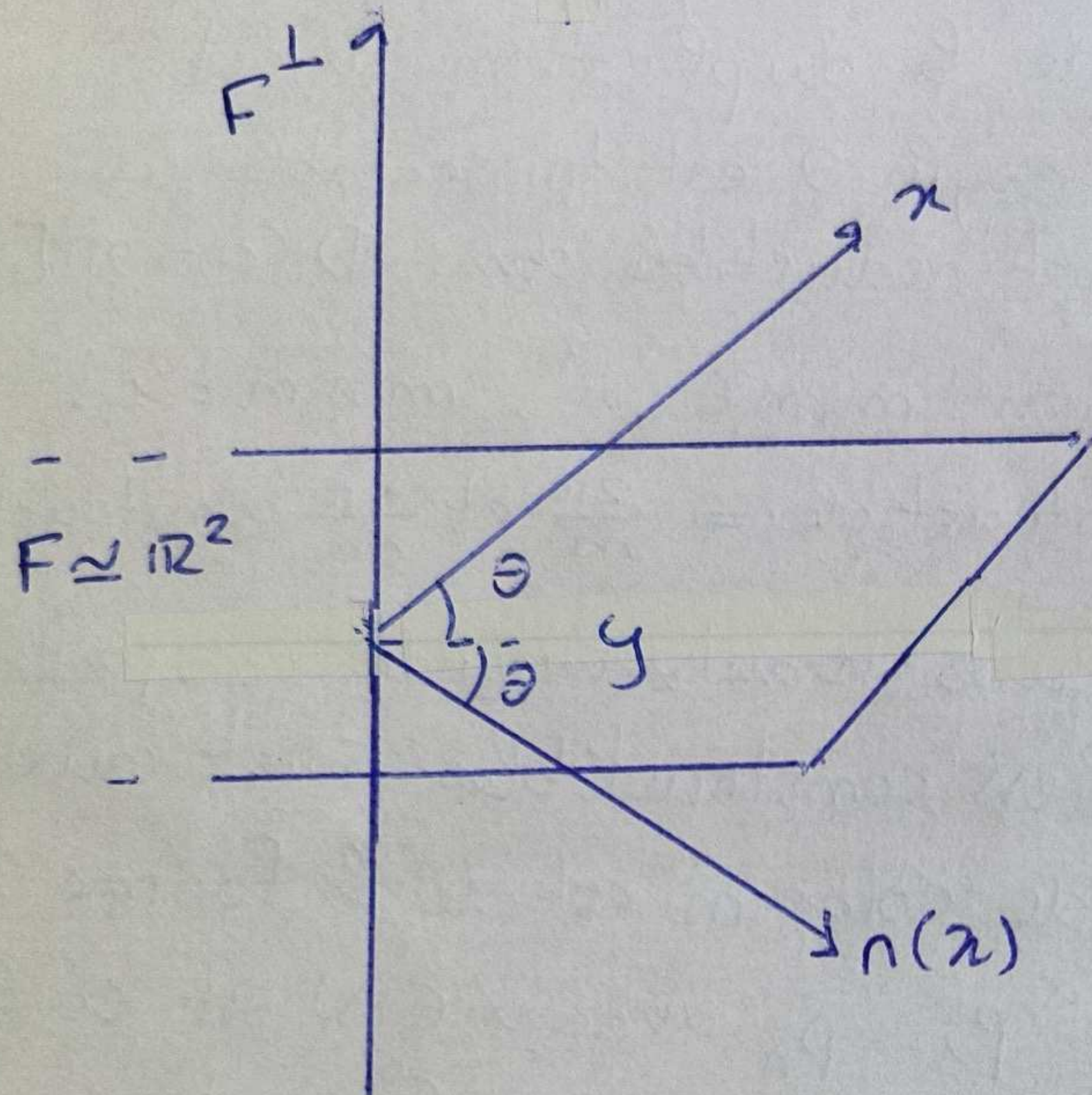


FIGURE 2: le cube C considéré

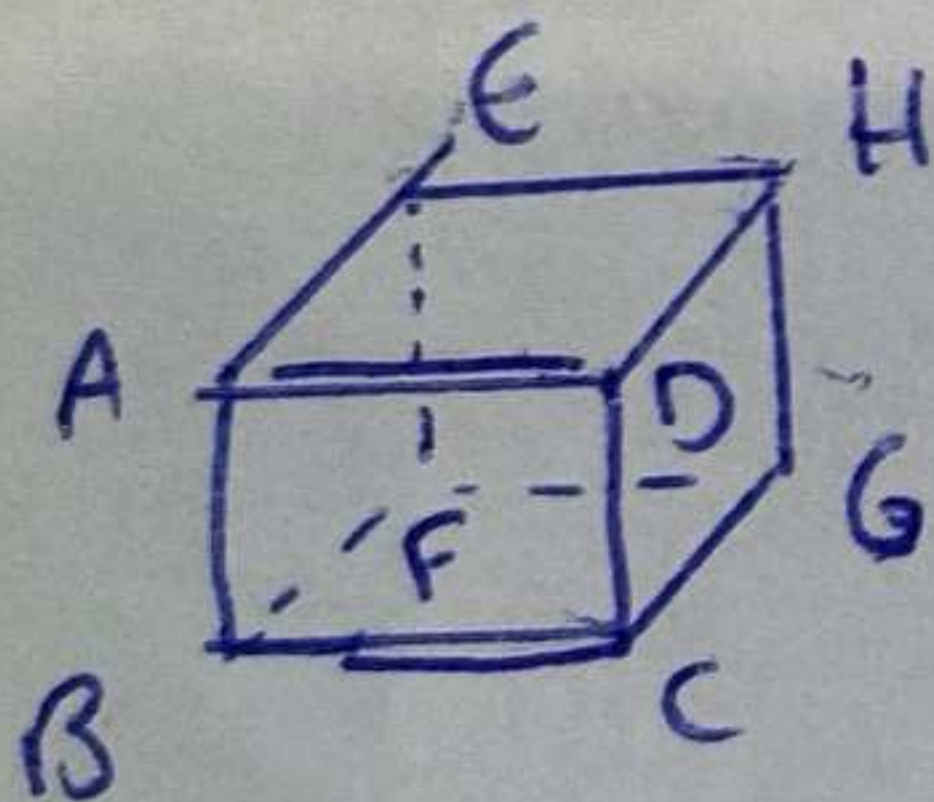
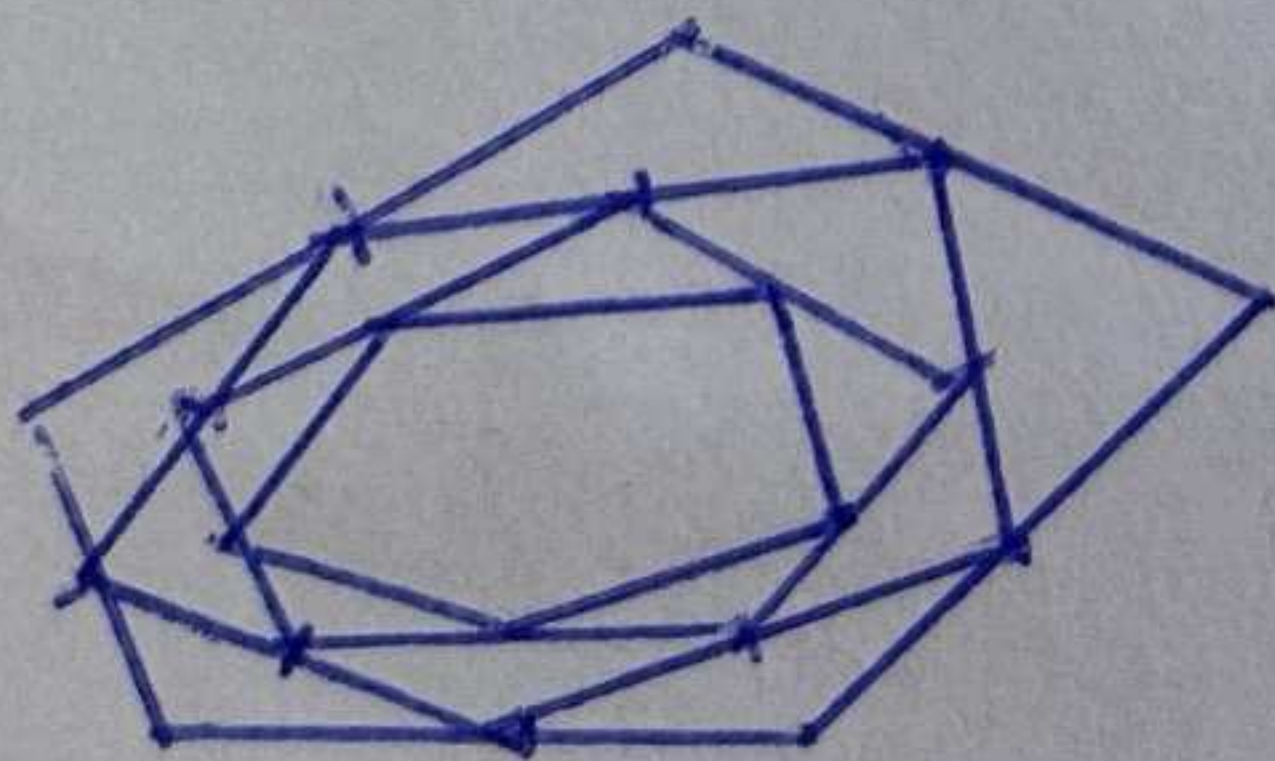


FIGURE 6: La suite de polygones $(P_k)_{k \geq 0}$



$\mathbb{R}^3$

FIGURE 3: Soient $p \in \mathbb{Z}^*$, $q \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\frac{p}{q} = x$ est constructible par le théorème de Thalès

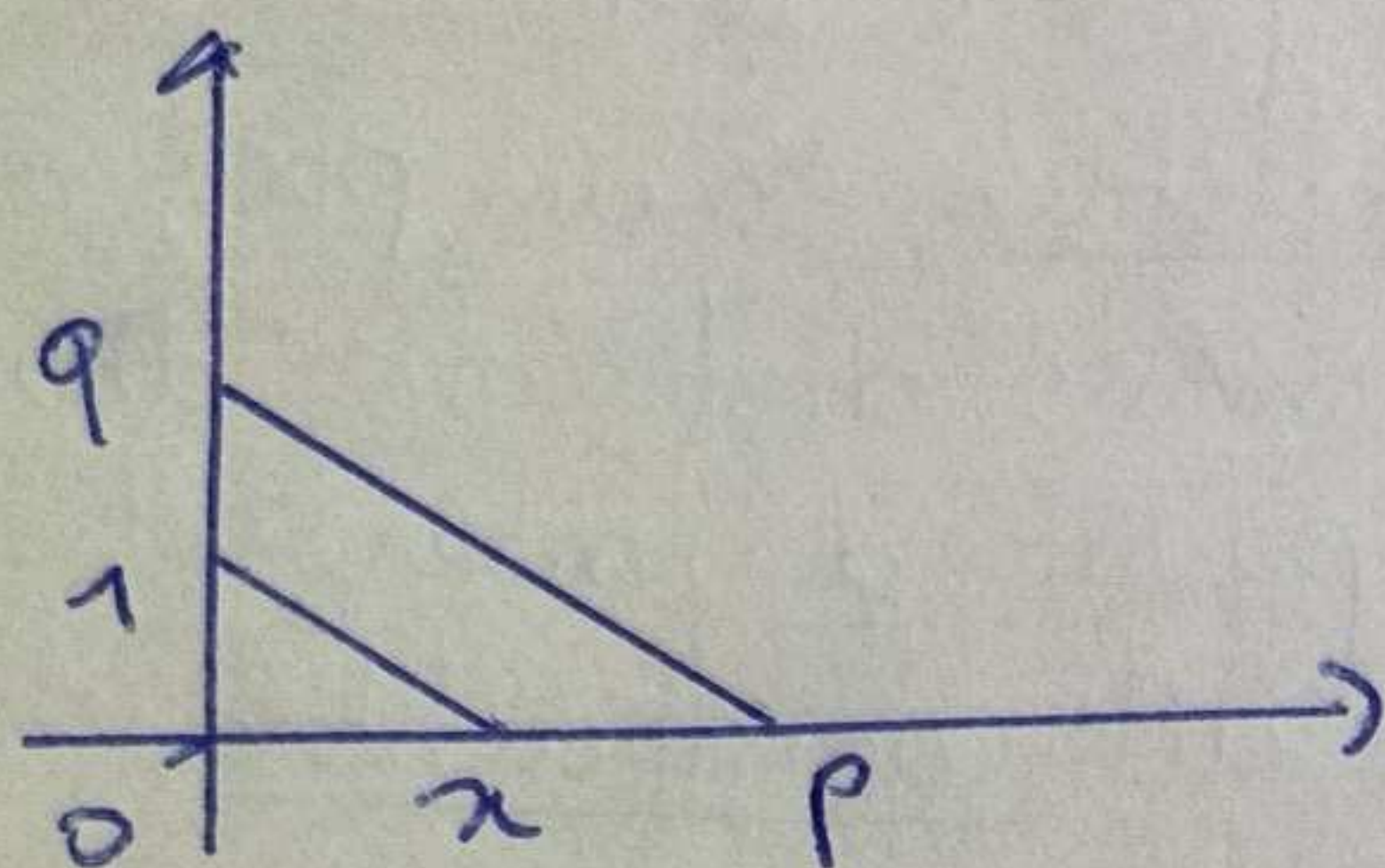


FIGURE 4: Soient $x, y, \alpha \in \mathbb{C}$. Alors, $z = \sqrt{\alpha}$ et $z \in \mathbb{C}$.

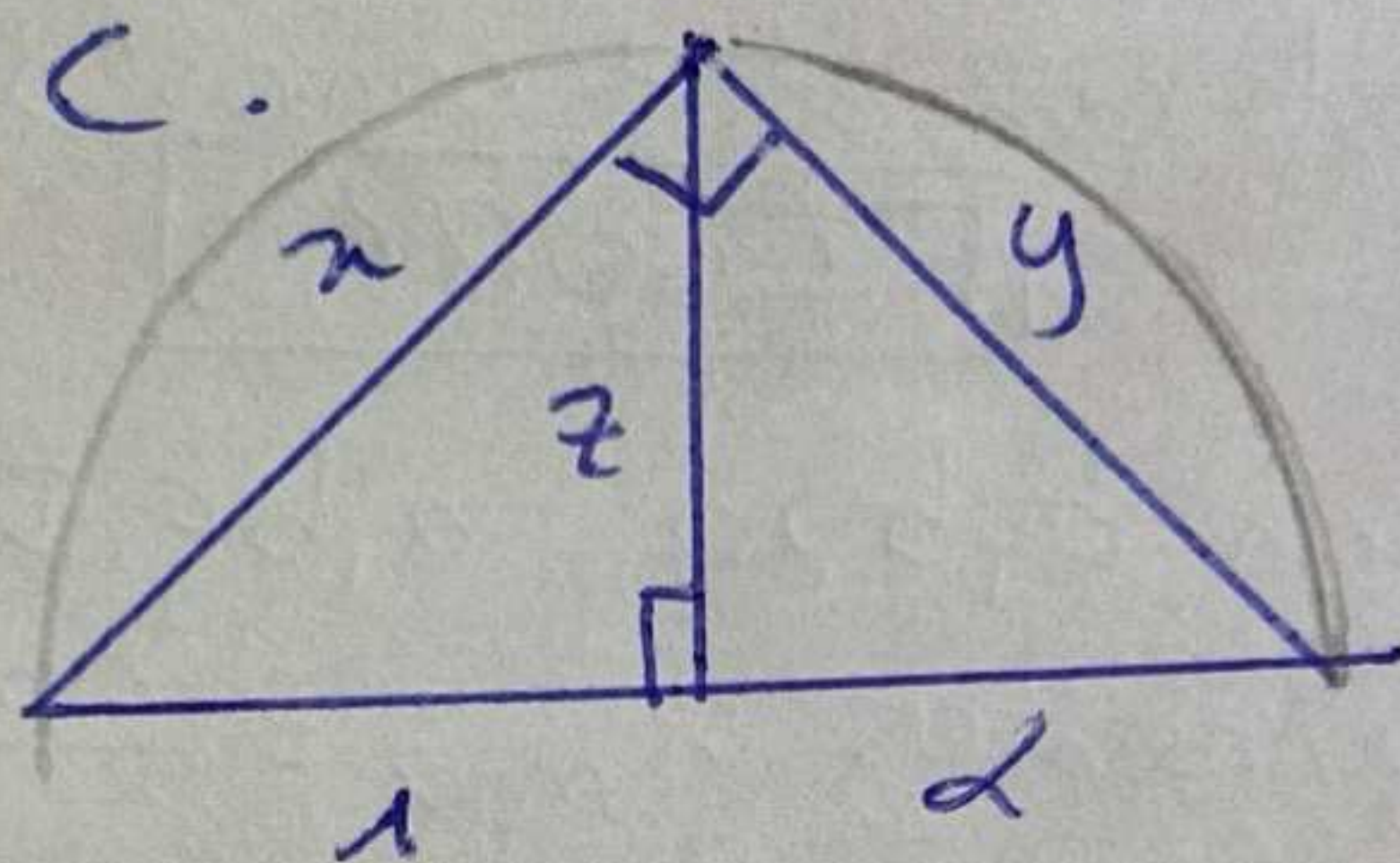


FIGURE 5: Construction de (x_{m+1}, y_{m+1})

